第一章: 有限元方法概论

PB19061245 王翔远

February 2024

1 PDE 边值问题的变分问题和极小化问题

1 维 Possion 方程 Dirichlet 边值问题:

$$(D)\begin{cases} -u'' = f, 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

定义函数空间 $V = \{v : v \in C[0,1], v'$在 [0, 1] 上分片连续有界, $v(0) = v(1) = 0\}$, 并记 $(u,v) = \int_0^1 uvdx$

给出变分问题

$$(V) Find\, u \in V s.t. (u', v') = (f, v), \forall v \in V$$

以及极小化问题

$$(M) Find\, u \in V s.t. F(u) \leq F(v), \forall v \in V$$

其中 $F : V \to R$ 是一个 V 上的线性泛函, 在这里定义为 $F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - (f, v)$

Proposition 1. $(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$, 并且当 u 具有 2 阶连续导数时 (a regularity assumption), $(V) \Rightarrow (D)$

Proof. $(D) \to (V)$: 对 $-u'' = f$ 两边同时乘上试探函数 v 并做积分, ($v \in V$, 注意 $v(0) = v(1) = 0$)

$$\int_0^1 -u''vdx = -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = (u', v')$$

便知 $(u', v') = (f, v)$

$(V) \to (M)$:

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \frac{1}{2}(u'+v', u'+v') - (f, u+v) \\ &= \frac{1}{2}(u', u') - (f, u) + (u', v') - (f, v) + \frac{1}{2}(v', v') \\ &= F(u) + \frac{1}{2}(v', v') \geq F(u) \end{aligned}$$

$(M) \to (V)$: 对任意 $v \in V$, $\phi(t) := F(u+tv)$ 在 t=0 处取得极小值, 则 0 是关于 t 的函数 ϕ 的驻点

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2}((u+tv)', (u+tv)') - (f, u+tv) \\ &= \frac{1}{2}(u', u') - (f, u) + t(u', v') - t(f, v) + \frac{1}{2}t^2(v', v') \end{aligned}$$

$$\phi'(t) = t(v', v') + (u', v') - (f, v) \xlongequal{t=0} (u', v') - (f, v) = 0$$

从而 $(u', v') = (f, v), \forall v \in V$

$(V) \to (D)$, when u" 连续: 仍用

$$\int_0^1 -u''vdx = -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = (u', v')$$

即可 □

2 有限元方法求解一维模型问题及误差估计

2.1 有限元求解流程

我们用有限元方法来求取变分形式的解, 这里记:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx = (u',v')$$

我们要寻找 $u \in V = \{w | w \in C[0,1], w(0) = w(1) = 0\}$ 满足

$$a(u,v) = (f,v)$$

将求解区域 $I = [0,1]$ 细分为 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = 1$. 考虑用有限维空间 $V_h \subset V$ 去逼近 V. 该有限维空间取为分段线性连续函数空间:

$$V_h = \{v \in C^0(I) : v|I_j \text{is linear for j=1, ..., N+1}; v(0) = v(1) = 0\}$$

其中

$$I_j = (x_{j-1}, x_j),\ \text{且记} h_j = x_j - x_{j-1}$$

这个有限维空间下的变分问题:

$$(V_h)\text{Find } u_h \in V_h, s.t.a(u_h, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h$$

这个有限维空间有一组基函数为 $\{\phi_j\}_{j=1}^N$, 他是这样定义的

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{if } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{if } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

从图像上是这样的:

我们将 u_h, v_h 在基下进行表示:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_h(x_i)\phi_i(x)$$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N} v_h(x_j)\phi_j(x)$$

$$a(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v_h(x_i)u_h(x_j)a(\phi_i, \phi_j)$$

由 $a(\phi_i, \phi_j) = a(\phi_j, \phi_i)$ 知这是一个二次型, 即有 $a(u_h, v_h)$ 的矩阵形式表示: $a(u_h, v_h) = W^T AU$, 其中

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$$

$$U = (u_h(x_1), \cdots, u_h(x_N))^T$$

$$W = (v_h(x_1), \cdots, v_h(x_N))^T$$

结合 (f, v_h) 的矩阵形式表示 $W^T F$, 就可以得到矩阵方程:

$$AU - F = O$$

这个矩阵 A 通常被称为刚度矩阵, 可以证明这是一个 (对称) 正定矩阵:

$$W^T AW = a(v_h, v_h) \geq 0 \text{ 且}$$

$$
\begin{aligned}
"=" \Leftrightarrow a(v_h, v_h) &= \int_0^1 v_h'(x)^2 dx = 0 \\
&\overset{v_h' \text{ 的连续性}}{\Longleftrightarrow} v_h'(x) \equiv 0 \\
&\overset{v_h \text{ 在端点处取零}}{\Longrightarrow} v_h = 0
\end{aligned}
$$

因此, 该矩阵方程的解是存在唯一的. 解出 U 向量之后, 利用 $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_h(x_i)\phi_i(x)$ 就得到了有限元解.

2.2 误差估计

Theorem 1. $a(u - u_h, v) = 0$, 称为误差方程

Proof.

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in V \supset V_h$$

$$a(u_h, v) = (f, v), \forall v \in V_h$$

相减即得结论 □

Theorem 2. $||(u - u_h)'|| \leq ||(u - v)'||, \forall v \in V_h$ ($|| \cdot ||$ 默认 L^2 范数)

Proof. $\forall v \in V_h$,

$$
\begin{aligned}
& a(u - u_h + v, u - u_h + v) \\
& = a(u - u_h, u - u_h) + 2(u - u_h, v) + a(v, v) \\
& = a(u - u_h, u - u_h) + a(v, v) \\
& \geq a(u - u_h, u - u_h)
\end{aligned}
$$

这其实已经说明范数平方的大小了, 开方便得结论 □

由上述定理, 我们可以选取适当 $\tilde{u_h} \in V_h$, 用 $||(u-\tilde{u_h})'||$ 估计 $||(u-u_h)'||$

令 $\tilde{u_h}$: u 的分片线性插值函数. 我们现在区间 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 上面看: 记 $e(x) = u(x) - \tilde{u_h}(x)$, 由于 $e(x_{j-1}) = e(x_j) = 0$, 根据 Rolle 中值定理可知 $\exists \xi_j s.t. e'(\xi_j) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} |e'(x)| &= |e'(x) - e'(\xi_j)| \\ &= |e''(\eta_j)(x - \xi_j)| \\ &\leq h_j max|e''(x)| \\ &= h_j max|u''(x)| \end{aligned}$$

于是, 在整个区间上, 有

$$|u'(x) - u_h'(x)| \leq h\, max|u''|, h = max\{h_j\}_{j=1}^{N+1}$$

从而

$$||u' - u_h'||^2 = \int_0^1 (u' - u_h')^2(x)dx \leq \int_0^1 (h\, max|u''|)^2 dx = (h\, max|u''|)^2$$

这便得到了解的导数的 L^2 误差估计

Proposition 2. $||u' - u_h'|| \leq h \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |u''|$

我们接下来考虑对 $||u - u_h||$ 的估计. 回忆我们在数值分析中学习到的多项式插值误差定理

Theorem 3. (多项式插值误差定理) $f \in C^{n+1}[a,b], p \in \prod_n$ 为 f 在 n+1 个不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 插值多项式. 那么 $\forall x \in [a,b], \exists \xi_x \in (a,b) s.t. f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

应用在 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 上 ($\tilde{u_h}(x)$ 插值 $u(x)$), 便有

$$|u(x)-\tilde{u_h}(x)|=|\frac{u''(\xi_x)}{2}(x-x_{j-1})(x-x_j)|\le\frac{h_j^2}{8}|u''(\xi_x)|\le\frac{h^2}{8}max|u''|$$

从而

$$||u-u_h||^2\le\int_0^1(\frac{h^2}{8}max|u''|)^2=(\frac{h^2}{8}max|u''|)^2$$

这便得到了解的 L^2 误差估计

Proposition 3. $||u-u_h||\le\frac{h^2}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}|u''(x)|$

Note. 我们后面主要是关心的是误差关于分割尺度 h 的阶数, 前面的常数不太重要 □

但上面的误差估计还是稍有缺憾, 原因是我们对误差的控制需要借助于 u'' 的最大模或者说是 L^∞ 模. 我们希望得到一个用比较弱的 u'' 的 L^2 即 $||u''||$ 来进行控制.

下面我们借助于 Cauchy-Schwarz 不等式重新进行估计 $||u'-u_h'||$: 在区间 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 上, 由之前结论 $\exists\xi_j s.t.(u-\tilde{u_h})'(\xi_j)=0$, 因此由 Newton-Leibniz 公式: $u(x)-\tilde{u_h}(x)=\int_{\xi_j}^x(u-\tilde{u_h})''(x)dx$. 那么有

$$\begin{aligned}|(u-\tilde{u_h})'(x)|^2&=|\int_{\xi_j}^x(u-\tilde{u_h})''(x)dx|^2\\&\le|\int_{\xi_j}^x1^2dx||\int_{\xi_j}^x((u-\tilde{u_h})''(x))^2dx|\\&\le\int_{x_{j-1}}^{x_j}1^2dx\int_{x_{j-1}}^{x_j}((u-\tilde{u_h})''(x))^2dx\\&=h_j\int_{x_{j-1}}^{x_j}((u-\tilde{u_h})''(x))^2dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} |(u-\tilde{u_h})'(x)|^2 &\le h_j^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} ((u-\tilde{u_h})''(x))^2 dx \\ &\le h^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} ((u-\tilde{u_h})''(x))^2 dx\end{aligned}$$

之后对各个小区间 (称为单元) 求和,

$$\int_0^1 |(u-\tilde{u_h})'(x)|^2 \le h^2 \int_0^1 ((u-\tilde{u_h})''(x))^2 dx$$

注意到 $\tilde{u_h}'' = 0$,

$$||u' - \tilde{u_h}'||^2 \le h^2 \, ||u''||^2$$

便有

Theorem 4. $||u' - u_h'|| \le h \, ||u''||$

关于 $||u-u_h||$ 使用 $||u''||$ 的控制, 需要用 Nitsche 对偶技巧证明.

Theorem 5. $||u-u_h|| \le h^2 ||u''||$

Proof. 对偶方程

$$\begin{cases} -w'' = u - u_h, 0 < x < 1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ||u-u_h||^2 &= (u-u_h, -w'') \\ &= ((u-u_h)', w') \\ &= ((u-u_h)', (w-v)'), \forall v \in V_h(\text{误差方程}) \\ &\le ||(u-u_h)'|| ||(w-v)'||, \text{取 v 为 w 的线性插值函数} \\ &\le h||u''|| \, h||w''|| \\ &= h^2||u''|| ||u-u_h|| \end{aligned}$$

因此, 就得到 $||u-u_h|| \leq h^2||u''||$ □

3 一维模型问题求解的编程实现

我们在上一小节已经给出了有限元方法导出的矩阵方程:

$$AU = F$$

其中, 刚度矩阵 A: $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$. 载荷向量 F: $F_i = (f, \phi_i)$. 我们只需要求出刚度 A 和载荷 F, 就能得到解向量 U, 进而插值出有限元解.

一种简单的想法, 自然是逐个直接计算 $a(\phi_i, \phi_j), (f, \phi_i)$, 即以基函数作为循环. 对一维问题, 这样做也足够了. 不过, 下面介绍的这种以单元作为循环的方法, 较容易推广到二维或更高维的计算. 它体现了有限元的" 分块逼近, 总体合成" 的理念.

引入单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 上的局部基函数

$$\psi_j^0 = \begin{cases} \dfrac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}}, x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, else \end{cases}$$

$$\psi_j^1 = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, else \end{cases}$$

利用变换 $\xi = \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$ 可得到标准单元形函数

$$\psi^0(\xi) = \begin{cases} 1-\xi, \xi \in [0,1] \\ 0, else \end{cases}$$

$$\psi^1(\xi) = \begin{cases} \xi, \xi \in [0,1] \\ 0, else \end{cases}$$

此时

$$
\begin{aligned}
a(\phi_i, \phi_j) &= a(\psi_i^1 + \psi_{i+1}^0, \psi_j^1 + \psi_{j+1}^0) \\
&= a(\psi_i^1, \psi_j^1) + a(\psi_{i+1}^0, \psi_j^1) + a(\psi_i^1, \psi_{j+1}^0) + a(\psi_{i+1}^0, \psi_{j+1}^0)
\end{aligned}
$$

因此

$$a(\phi_i, \phi_j) = 0, if\ |i-j| > 1$$

$$a(\phi_i, \phi_i) = a(\psi_i^1, \psi_i^1) + a(\psi_{i+1}^0, \psi_{i+1}^0)$$

$$a(\phi_i, \phi_{i+1}) = a(\psi_{i+1}^0, \psi_{i+1}^1)$$

由此, 我们引入局部刚度矩阵. 第 j 个单元格的局部刚度矩阵定义为 $(j = 1, \cdots, N+1)$:

$$
\begin{aligned}
k_j &:= \begin{pmatrix} a(\psi_j^1, \psi_j^1) & a(\psi_j^1, \psi_j^0) \\ a(\psi_j^0, \psi_j^1) & a(\psi_j^0, \psi_j^0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{h_j} \begin{pmatrix} a(\psi^1, \psi^1) & a(\psi^1, \psi^0) \\ a(\psi^0, \psi^1) & a(\psi^0, \psi^0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{h_j} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

将其可以扩展为一个 $N \times N$ 的矩阵, 其中中间第 j-1 到第 j 行 (列) 形成的 2 阶子矩阵就是 k_j. 不难验证, (整体) 刚度矩阵 A 恰好就为扩展的局部刚度矩阵 k_j 之和

$$A = \sum_{j=1}^{N+1} k_j$$

同理载荷向量也可以如上法, 先求出局部载荷向量, 之后扩展后求和

$$F = \sum_{j=1}^{N+1} b_j$$

Note. 一维模型问题的编程求解参见实验 1(线性元), 实验 2(二次元).

二维情形 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题的有限元编程实现思路也是类似的, 可以参考后续编程实验 4(线性元), 5(二次元). 正文中将从略 □

4 Neumann 边值问题

我们来讨论以下二维情形 Poisson 方程 Neumann 问题

$$(D)\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 & (\Gamma = \partial\Omega) \end{cases}$$

注意到这个问题解是不唯一的: 不同解之间可以相差一个常数. 因此添加 $\int_{\Omega} f dx = 0$ 作为定解条件.

在下面的问题中, 我们用到了后面的 Sobolev 空间中的记号方便表示. 在此可以不太关注, 也可以等后面学过 Sobolev 空间再回来看.

令 $V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\}$. 变分问题定义为: $(W) find\, u \in V s.t. a(u,v) = (f,v), \forall v \in V$. 其中 $a(u,v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$

下面问题中涉及使用 Green I 公式: (更多内容请参看 Evans PDE 附录 C.2 内容)

Theorem 6. (Green I) $\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_U v \Delta u dx$ ($U : R^n$ 中有界开集)

Note. 顺带一提, 上述是如下多变量函数形式的关于某个变量分部积分公式推出来的:

$$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS$$

这个公式对一些 Sobolev 空间中作业题很有用 □

Proposition 4. $((D) \to (W))$ 设 $u \in H^2(\Omega)$ 为 (D) 的解, 则 $u - \bar{u}$ 为 (W) 的解.

Note. $\bar{u} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega u d\Omega$, 是函数在区域上的平均值 □

Proof. 利用 Green I 公式便很容易得到结论 □

Proposition 5. $((W) \to (D))$ 设 $u \in H^2(\Omega)$, 则 u 也为下述问题解

$$(\tilde{D}) \begin{cases} -\Delta u = f - \bar{f}, \quad (x, y) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = 0 \quad (\Gamma = \partial\Omega) \end{cases}$$

为证明该结论, 首先引入一个技术性的引理 (看起来比较显然的, 但证明并不平凡)

Theorem 7.

(1) 如果 $\int_U u\phi dx = 0, \forall \phi \in \mathcal{D}(U)$: U 上有紧支撑的光滑函数 . 那么 $u = 0 \quad a.e. \quad on\, U$

(2) 如果 $\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \forall v \in V$, 那么 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad a.e. \quad on\, \partial\Omega$ (这里假定了 $\partial\Omega$ 性态较" 好")

Note. 关于 (1) 的证明参见章俊彦学长Evans PDE(2nd) 第五章习题解答中关于弱导数唯一性的证明过程

关于 (2) 的证明参见 Brenner 教材第五章命题 5.1.9 的证明过程 □

Proof. (**Proposition 5**) 由

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

根据 Green I 公式得到

$$-\int_\Omega \Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS = \int_\Omega f v dx$$

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS$$

首先, 我们取 $v \in \mathcal{D}(\Omega) \cap V$($V$的稠密的子空间), 此时 $v = 0\, on\, \partial\Omega$. 从而

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v dx = 0, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \cap V$$

由上述引理 (1) 结合 $\int_\Omega v dx = 0$ 可知

$$\Delta u + f = C$$

此时得

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS = 0, \forall v \in V$$

那么由上述引理 (2) 得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad on\, \partial\Omega$$

最后, 由 Green I 可知

$$\int_\Omega \Delta u = 0$$

故有

$$-\Delta u = f - \bar{f}$$

□

编程实现时, 利用上述命题 5, 可考虑变分问题:

$$\text{Find } u \in H^1(\Omega), \lambda \in R,\ s.t. \quad a(u,v) + (\lambda, v) = (f, v), \forall v \in V$$

其中 $\lambda = \bar{f}$. 具体编程求解参考实验 3