第二章: Sobolev 空间

PB19061245 王翔远

February 2024

1 记号与不等式

首先, 简单回顾一些关于 L^p 空间的知识.

设 $f(x)$ 是 $\Omega \subset R^n$ 上的可测函数,

Definition 1.

(1)L^p 范数:

$$||f||_p := (\int_\Omega |f(x)|^p)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$$

$$||f||_\infty := ess\,sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

(2)L^p 空间:

$$L^p(\Omega) := \{f : ||f||_p < \infty\}, \quad 0 < p \leq \infty$$

Note. 关于本性上确界 $ess\,sup\{|f|\}$:

若 $\exists M, s.t. |f(x)| \leq M a.e. x \in \Omega$, 称 f 在 Ω 上本性有界, M 称为 $f(x)$ 的本性上界. 本性上界的下确界称为本性上确界. □

L^p 空间中两个重要的不等式:

Theorem 1.

(1) Holder 不等式:

$$\text{设}1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\text{则}||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

(2) Minkovski 不等式:

$$\text{设}1 \leq p \leq \infty, \text{则}||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Note. Holder 不等式中 $p = q = 2$ 时就是 Cauchy-Schwarz 不等式.

此外, 我们之后认为两个函数是相等的, 如果他们的差函数的 L^p 模为 0. 比如说两个函数几乎处处相等时就认为是相等的. □

Theorem 2. L^p 空间是 Banach 空间 (*i.e.* 完备的赋范线性空间)

下面引入一些记号 (Z_+ 表示非负整数):

Definition 2.

(1) 多重指标 (multi-index): $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_i \in Z_+$.

$$D^\alpha \phi(\text{或}\phi^{(\alpha)}, (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \phi) := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$$

D^α 的阶定义为: $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$. 此外,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}; \quad \frac{\partial}{\partial x} := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$$

(2) 支集 (support): $suppu := \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$. 如果 $suppu$ 为紧集 (即有界) 且包含于 Ω 的内部 (Ω°), 称 u 在 Ω 上有紧支撑.

$\mathcal{D}(\Omega)$(或$C_0^\infty(\Omega)$) $:= \{f$: f 在 Ω 上有紧支撑且无限次连续可微 (光滑)$\}$

(3) 局部可积函数空间:

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K), \forall \text{K: a compact set in } \Omega^\circ\}$$

下面给出的这个例子称为标准磨光子 (standard mollifier).

Example 1.

$$\eta(x) := \begin{cases} Cexp(\frac{1}{|x|^2 - 1}, & |x| < 1 \\ 0 \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

其中常数 $C > 0$ 满足 $\int_{R^n} \eta dx = 1$

用数学归纳法可知

$$\phi^{(\alpha)}(x) = P_\alpha(x)\phi(x)/(1 - |x|^2)^{|\alpha|}, P_\alpha \text{is a polynomial}$$

因此可知 $\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall$open set Ω containing the closed unit ball

Note. 更多关于卷积和磨光的内容参见 Evans PDE 附录 C.5(Convolution and smoothing) □

2 弱导数

Definition 3. 设 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. 如果 $\exists g \in L^1_{loc}(\Omega)$ $s.t.$ $\int_\Omega g\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\phi^{(\alpha)}dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. 称 f 有弱导数 g, 记为 $D^\alpha_w f$

Example 2. $n = 1, \Omega = [-1, 1], f(x) = 1 - |x|$. 可知:

$$D^1_w f = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

但是, $D^j_w f, j > 1$ 时不存在

Proof.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f\phi' dx &= \int_{-1}^{0-}(1+x)\phi' dx + \int_{0+}^1 (1-x)\phi' dx \\ &= (1+x)\phi|_{-1}^{0-} - \int_{-1}^{0-}\phi dx + (1-x)\phi|_{0+}^1 + \int_{0+}^1 \phi dx \\ &= \phi(0-) - \phi(0+) - \int_{-1}^{0-}\phi dx + \int_{0+}^1 \phi dx \\ &= -(\int_{-1}^0 \phi dx - \int_{0+}^1 \phi dx)\end{aligned}$$

因此便得到了如上的 1 阶弱导数

至于高于一阶弱导数不存在的证明留作练习, 其技巧已经蕴含在下面的例子中 □

Example 3.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

证明 f 没有 L^2 可积的弱导数

Proof. [反证]: 假若有弱导数 $g \in L^2[-1,1]$, 则 $\forall \phi \in C_0^\infty(-1,1)$,

$$\int_{-1}^{1} g\phi dx = -\int_{-1}^{1} f\phi' dx$$

等式左侧利用 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\int_{-1}^{1} g\phi dx \leq ||g||_2||\phi||_2$$

而等式右侧:

$$-\int_{-1}^{1} f\phi' dx = -\int_{0}^{1} \phi' dx = \phi(0)$$

取 $\phi_\epsilon(x) = \eta(\frac{x}{\epsilon})$, 其中 η 是标准磨光子函数. 此时

$$\phi_\epsilon(0) = Ce^{-1}$$

$$||\phi_\epsilon||^2 = \int_{-1}^{1} \phi_\epsilon^2 dx = \epsilon \int_{-1}^{1} \phi^2 dx.$$

可见, 令 $\epsilon \to 0$, 左侧收敛于 0(注意 $||g||_2 < \infty$), 右侧为一个正常数, 这样便矛盾. □

如下的命题说明了, 弱导数实际上是经典导数的推广

Proposition 1. 设 $\psi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, 则 $D_w^\alpha \psi$ 存在且等于 $D^\alpha \psi$

Proof. $|\alpha| = 1$ 时, 利用分部积分:

$$\int_\Omega \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \psi\phi\nu^j dS$$

由于 $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 便得到结论.

$|\alpha| > 1$ 时, 用归纳法便容易证明 □

Note. 最后提醒一点, 弱导数的高阶导数不是通过低阶导数定义的, 因此, 可以有高阶弱导数而没有低阶弱导数 □

3 Sobolev 空间

Definition 4. 设 $f \in L^1_{loc}(\Omega), k \in Z_+$. 假定 $D^\alpha_w f$ 在 $|\alpha| \le k$ 时存在. 定义 Sobolev 范数

$$||f||_{W^k_p(\Omega)} := (\sum_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha_w f||^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, p < \infty$$

$$||f||_{W^k_\infty(\Omega)} := \max_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha_w f||_{L^\infty(\Omega)}$$

Definition 5. Sobolev 空间定义为

$$W^k_p(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : ||f||_{W^k_p(\Omega) < \infty}\}$$

Note. $||f||_{W^0_p(\Omega)} = ||f||_{L^p(\Omega)}$; $f \in W^k_p(\Omega) \Leftrightarrow D^\alpha_w f \in L^p(\Omega), |\alpha| \le k$ □

Theorem 3. Sobolev 空间是 Banach 空间

Proof. 设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $W^k_p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列.

首先, $u_n \in L^p(\Omega)$ 且 $||u_m - u_n||_{L^p(\Omega)} \le ||u_m - u_n||_{W^k_p(\Omega)} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$. 即 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^p(\Omega)$ 空间中的 Cauchy 列, 由 L^p 空间完备性可设 $u_n \longrightarrow$

u in $L^p(\Omega)$, 同理设 $D_w^\alpha u_n \longrightarrow u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k$

下证 $D_w^\alpha u = u^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_w^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^{(\alpha)} \phi dx\end{aligned}$$

因此 $D_w^\alpha u$ 存在且等于 $u^{(\alpha)}$

最后说明 $u_n \to u$ in $W_p^k(\Omega)$: $(p < \infty)$

$$||u_n - u||_{W_p^k(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|\leq k} ||D_w^\alpha u_n - D_w^\alpha u||^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

因此 $p < \infty$ 时, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在空间中收敛, $p = \infty$ 自然也是一样的. □

下面这个定理对我们后续分析问题很有帮助 (经常可以使用 density argument 手法):

Theorem 4. $C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中稠密

Note. 这个定理证明略 (由一篇论文 (by Meyers and Serrin in 1964) 给出). 不过可以类比实分析中紧支集上连续函数在 L^1 空间中稠密来记住? □

最后再来补充一点记号. 当 $p = 2$ 时, 我们记 $W_2^k(\Omega) \triangleq H^k(\Omega)$. 这是一个 Hilbert 空间 (*i.e.* 完备的内积空间). 内积为

$$< u, v > := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D_w^\alpha u D_w^\alpha v dx$$

这可以诱导出之前定义的 $H^k(\Omega)$ 上的范数

另外, 还有 Sobolev 半范数:

Definition 6. 对 $1 \leq p < \infty$:

$$|f|_{W_p^k(\Omega)} := (\sum_{|\alpha|=k} ||D_w^\alpha f||_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

对 $p = \infty$:

$$|f|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=k} ||D_w^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}$$

最后, 提一下 Lipschitz 范数和空间:

Definition 7.

$$||f||_{Lip(\Omega)} := ||f||_{L^\infty(\Omega)} + sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x \neq y\}$$

$$Lip(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : ||f||_{Lip(\Omega)} < \infty\}$$

Note. 习题 (非作业题) 中会证明在区域满足一定要求下 $Lip(\Omega) = W_\infty^1(\Omega)$

□

4 Sobolev 嵌入定理

几个常用的函数空间

Definition 8.

$C^m(\Omega)$: Ω 上 m 阶连续函数空间

$C_0^m(\Omega)$: $C^m(\Omega)$ 中在 Ω 有紧支撑的函数空间

$C_B^m(\Omega)$: Ω 上 m 阶有界连续函数空间, $||\phi||_{C_B^m(\Omega)} := \max_{0\leq|\alpha|\leq m}|D^\alpha_{x\in\Omega}\phi|$

$C^m(\bar{\Omega})$: 有界一致连续函数空间

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$: Holder 连续函数空间.

$$||\phi||_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} := ||\phi||_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{0\leq|\alpha|\leq m}\sup_{x\neq y}\frac{|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

注意到: $0 < r < \lambda \leq 1$ 时, $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^{m,r}(\bar{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$

关于函数空间的关系, 有两个简单的命题

Proposition 2. 设 $m, k \in Z_+$, $m \geq k$, 则 $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$

Proposition 3. 设 Ω 有界, $k \in Z_+, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, 则 $W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$

Proof. 上面这个命题的证明其实就是证 Ω 有界且 $p < q$ 时, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. 利用 Holder 不等式可以导出如下关系

$$||f||_p = (m(\Omega))^{\frac{q-p}{pq}}||f||_q$$

利用 Ω 有界性自然得到结论 □

在给出 Sobolev 嵌入定理之前, 首先定义一下嵌入:

Definition 9. 设 X, Y: Banach 空间. 如果 $X \subset Y$ 且恒同算子 $I: x \to Y, Ix = x$ 是有界线性算子 ($i.e. ||Ix||_Y \le C||x||_X$), 称 X 嵌入 Y, 记为 $X \hookrightarrow Y$. 如果 I 还是紧算子 (有界集映为列紧集), 称 X 紧嵌入 Y.

并给出一个性态比较好的边界:

Definition 10. 设 Ω 有界. 如果 $\forall x \in \partial\Omega, \exists x$邻域$U_x\ s.t.\ U_x \cap \Omega$ 为一个 Lipschitz 连续函数的图, 称 Ω 有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$

先给出一个基础版本的 Sobolev 嵌入定理:

Theorem 5. 设 $\Omega \subset R^n$ 有界开, 有 Lipschitz 边界. $(1 \le p < \infty)$

$$(1) p < n : W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{其中} p \le q \le p* \triangleq \frac{np}{n-p}$$

$$(2) p = n : W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{其中} p \le q \le \infty$$

$$(3) p > n : W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \text{其中} 0 \le \lambda < 1 - \frac{n}{p}$$

更一般的版本是:

Theorem 6. 设 $\Omega \subset R^n$ 有界开, 有 Lipschitz 边界. $(1 \le p < \infty)$

$$(1) mp < n : W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{其中} p \le q \le p* \triangleq \frac{np}{n-mp}$$

$$(2) mp = n : W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{其中} p \le q \le \infty$$

$$(3) mp > n : W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^{m-[\frac{n}{p}]-1,\lambda}(\bar{\Omega}), \text{其中} 0 \le \lambda < \lambda_0.$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p}\text{不是整数} \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \frac{n}{p}\text{是整数} \end{cases}$$

另外, 涉及到 L^∞ 空间有如下定理

Theorem 7. 设 $\Omega \subset R^n$ 有界开, 有 Lipschitz 边界. 如果满足 (1) $p = 1$时$m \ge n$ 或 (2) $p > 1$时$mp > n$, 则 $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Theorem 8. 设 $\Omega \subset R^n$ 有界开, 有 Lipschitz 边界. 如果满足 (1) $p = 1$时$m-k \ge n$ 或 (2) $p > 1$时$(m-k)p > n$, 则 $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow W_\infty^k(\Omega)$

Note. 以上关于 Sobolev 空间中嵌入定理的证明可参考 Evans PDE 5.6 节. □

Example 4. 由 Sobolev 嵌入定理可知, 当 $\Omega \subset R$ 有界开, 有 Lipschitz 边界时 $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, 以及 $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$. 这是两个简单常用的 Sobolev 空间嵌入关系.

5 迹定理

对于一个 $f \in C(\bar{\Omega})$, f 在边界上的值自然就用常义的即可. 但问题是, 由于 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 只是在" 几乎处处" 这种意义下定义的, 不关心在零测集上的取值. 而 $\partial\Omega$ 是一个 R^n 中零测集 (它是一个 $n-1$ 维曲面). 显然, 常规方式下不能让"u restricted to $\partial\Omega$" 有意义. 迹算子的概念可以解决这一问题.

Theorem 9. 设 U 有界, ∂U 是 C^1 的 ($i.e.$ 是一个连续可微函数的图), $1 \leq p < \infty$. 则存在一个有界线性算子

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U) \quad s.t.$$

(i) $Tu = u|_{\partial U}$ if $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$

(ii)

$$||Tu||_{L^p(\partial U)} \leq C||u||_{W^{1,p}(U)}$$

对任意 $u \in W^{1,p}(U)$ 成立. 其中常数 C 仅依赖 p 和 U

Note. 我们称 T 为一个迹算子, Tu 是 u 在 ∂U 上的迹 $\square$

上面主要参考 Evans PDE 中的教材 (证明请参考 Evans 5.5 节定理 1). Brenner 教材给出了一个更强的估计 (但没有给证明):

Theorem 10. 设 Ω 有界, $\partial\Omega$ Lipschitz 连续, $1 \leq p \leq \infty$. 则 $\exists C$ s.t.

$$||v||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C||v||_{L^p(\Omega)}^{1-1/p}||v||_{W_p^1(\Omega)}^{1/p}$$