第三章: 椭圆型问题的适定性

PB19061245 王翔远

February 2024

1 椭圆型问题解的存在唯一性

本章在 $H^k(\Omega) \triangleq W_2^k(\Omega)$ 即这样一个 Hilbert 空间中讨论之前第一章就涉及变分问题 (抽象形式).

$$(W) Find\, u \in V, s.t.\, a(u,v) = L(v), \forall v \in V$$

首先介绍一些泛函分析中的基本内容:

Definition 1. (1) 线性泛函 L: H(Hilbert 空间)$\rightarrow R$, $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$. L 称为有界的, 如果 $\exists C > 0, L(v) \leq C||v||_H, \forall v \in H$.
(2)H' := {H 上的有界线性泛函}. 其上可定义范数: $||L||_{H'} := \underset{0\neq v\in H}{sup} \frac{|L(v)|}{||v||_H}$.
(3) 双线性函数 a(·,·): $H \times H \rightarrow R$. $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u,w) + \beta a(v,w)$, $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u,v) + \beta a(u,w)$

Note. 线性泛函 L 连续 $\Leftrightarrow$ L 有界. 另外, 上述 L 由线性泛函改为线性算子 (取值范围只要求为一个线性空间) 也是差不多的 □

有关双线性函数的两个重要性质:

Definition 2.

(1) 连续性 (有界性): $\exists C>0, s.t. |a(u,v)| \leq C||u||_H||v||_H$

(2) 强制性 (椭圆性): $\exists \alpha>0, s.t. a(u,u) \geq \alpha||u||_H^2$

我们下面将给出抽象变分问题的解的存在唯一性定理, 为此先给出一个经典的引理

Theorem 1. (压缩映射原理) V: Banach 空间. 算子 $T: V \to V$ 满足 $||Tv_1 - Tv_2|| \leq M||v_1 - v_2||$, 常数 M 满足$0 \leq M < 1$. 则存在唯一 $u \in V \; s.t. \, Tu = u$

下面的抽象变分问题的解的存在唯一性定理 (Lax-Milgram 定理) 是本章中最核心的结果

Theorem 2. 设 $V \subset H, F \in V'$. 如果双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 满足连续性和强制性, 那么抽象变分问题 (W) 存在唯一解

Proof. 给定 $u \in V$, 定义泛函 $Au: V \to V', Au(v) = a(u,v)$. 可知 Au 是线性有界算子 (且有 $||Au||_{V'} \leq C||u||_V$). 进一步, $A: u \mapsto Au$ 也是有界线性算子.

令 $\tau: V' \to V$ 为一个这样一个映射: 对 $F \in V'$, $F(v) = (\tau F, v)$. 不难证明 τ 是一个线性有界算子 (且有 $||\tau F||_V = ||F||_{V'}$)

此时, 原先抽象变分问题 (W) 存在唯一解, 当且仅当 $Au(v) = L(v), \forall v \in H$ 存在唯一解, 当且仅当 $\tau(Au) = \tau(L)$ 存在唯一解

下面就考虑对该问题使用压缩映射原理. 定义算子 $T: V \to V, Tv =$

$v - \rho(\tau Av - \tau L)$, 其中 ρ 是一个待定正常数. 我们可以通过说明 T 是一个压缩映射来完成证明.

$$\begin{aligned}||Tv_1 - Tv_2||^2 &= ||v_1 - v2 - \rho\tau A(v_1 - v_2)||^2 \\ &\xlongequal{令\ v = v_1 - v_2} ||v - \rho\tau Av||^2 \\ &= ||v||^2 - 2\rho(v, \tau Av) + \rho^2||\tau Av||^2 \\ &= ||v||^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2||\tau Av||^2 \\ &\leq ||v||^2 - 2\rho\alpha||v||^2 + \rho^2 C^2||v||^2 \\ &= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)||v||^2\end{aligned}$$

取 $\rho = \frac{\alpha}{C^2}$, 则有

$$||Tv_1 - Tv_2||^2 \leq (1 - \frac{\alpha^2}{C^2})||v_1 - v_2||^2$$

$$||Tv_1 - Tv_2|| \leq \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{C^2}}||v_1 - v_2||$$

因此说明了 T 为压缩映射, 因而存在唯一不动点, 即 $\exists u \in V\ s.t.$

$$Tu = u - \rho(\tau Av - \tau L) = u$$

从而

$$\tau Au = \tau L$$

□

对于变分问题的有限元形式, 由于 $V_h \subset V$, 因此也有解的存在唯一性.

另外, 由双线性形式的强制性可以推出有限元方法中刚度矩阵 A 的正定性:

$$\begin{aligned}\alpha||v||^2 \leq a(v,v) &= a(\sum_i v_i\phi_i, \sum_j v_j\phi_j) \\ &= \sum_i\sum_j a(\phi_i,\phi_j)v_iv_j \\ &= \eta^T A\eta, \eta = (v_i)^T\end{aligned}$$

于是 $\eta^T A\eta \geq 0$ 且 $" = " \iff \eta = 0$

Note. 除了抽象变分问题, 也有如第一章提到的抽象极小化问题, 但必须在双线性函数具有对称性时方可定义. 借助于 Riesz 表示定理, 可证明极小化问题在对称双线性泛函具有连续和强制性时解存在唯一.

不过, 极小化问题适用范围比变分问题窄 ($a(\cdot,\cdot)$ 很多情况并不对称), 后续不再用到, 这里就从略了 □

2 抽象变分问题误差估计

当双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 满足连续和强制性时, 有如下误差估计式

Theorem 3. (Cea 引理) 抽象变分问题 (W) 的解 u 与离散抽象变分问题 (W_h) 解 u_h, 满足

$$||u-u_h||_V \leq \frac{C}{\alpha}\inf_{v\in V_h}||u-v||_{v_h}$$

Proof. 首先易得误差方程: $a(u-u_h,v)=0,\forall v\in V_h$. 之后,

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|^2 &\le a(u-u_h,u-u_h)\\ &= a(u-u_h,u-v+v-u_h),\forall v\in V_h\\ &= a(u-u_h,u-v) \quad \text{(利用误差方程)}\\ &\le C\|u-u_h\|\|u-v\|\end{aligned}$$

因此

$$\|u-u_h\|\le\frac{C}{\alpha}\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_{v_h}$$

□

3 能量范数

当 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称双线性函数时, 定义内积

$$(u,v)_E:=a(u,v).$$

它诱导出

$$\|u\|_E=\sqrt{(u,u)_E}$$

称为能量范数.

利用误差方程, 不难得到

$$\|u-u_h\|_E\le\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_E$$

即: 有限元解 u_h 是 u 在 V_h 能量范数意义下的最佳逼近. 由 Hilbert 空间理论知: u_h 是 $u\in V$ 在子空间 V_h 上的正交投影 (能量内积意义下)

4　一些例子

首先给出一个关于变分空间 V 选取的简单例子

Example 1.　二维 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad (x,y) \in \Omega \subset R^2 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

其变分问题为: 取 $V = H_0^1(\Omega)$: H^1中有紧支撑的光滑函数集的闭包, 令

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, L(v) = \int_\Omega f v dx$$

变分问题为:

$$(W) Find\, u \in V\; s.t.\, a(u,v) = L(v), \forall v \in V.$$

至于 Neumann 边值问题, 此时的 V 取为 $H^1(\Omega)$ 即可

下面这个例子是一个完整的从原问题导出变分问题再说明解存在唯一性的分析过程

Example 2. (Johnson 2.3 题)

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4} = f, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u''(0) = u'(1) = u'''(1) = 0 \end{cases}$$

导出变分问题:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 fv dx &= \int_0^1 \frac{d^4u}{dx^4} v dx \\
&= -\int_0^1 \frac{d^3u}{dx^3}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3}|_0^1 \\
&\overset{\text{需要}v(0)=0}{\underset{\text{已有}u'''(1)=0}{=\!=\!=\!=\!=}} -\int_0^1 \frac{d^3u}{dx^3}\frac{dv}{dx} dx \\
&= \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2} dx + u''v'|_0^1 \\
&\overset{\text{需要}v'(1)=0}{\underset{\text{已有}u''(0)=0}{=\!=\!=\!=\!=}} \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2} dx
\end{aligned}$$

因此, 令 $V = \{v \in H^2(\Omega) : v(0) = v'(1) = 0\}$. $(\Omega = (0,1))$ 变分问题:

$$(W) find\, u \in V, s.t.\, a(u,v) = L(v)$$

其中

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2} dx$$

$$L(v) = \int_0^1 fv dx$$

Example 3. (接上例) 我们继续来证明变分问题解的存在唯一性.

为此, 想证明 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续且强制的双线性泛函, 同时 $L(\cdot)$ 是有界线性泛函. a 双线性显然, 下验证

(i) a 连续:

$$a(u,v) \leq |u|_{H^2(\Omega)}|v|_{H^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^2(\Omega)}||v||_{H^2(\Omega)}$$

(ii) a 强制: 首先, 由 $v \in V$ 时 $v'(1) = 0$ 有 $v'(x) = \int_1^x v''(x)dx$. 从而

$$|v'| \leq \int_0^1 |v''(x)|dx \leq ||1||_{L^2(\Omega)}||v''||_{L^2(\Omega)}$$

进而, 易得 $||v'||_{L^2(\Omega)} \leq ||v''||_{L^2(\Omega)}$. 同理, 我们也可以证明 $||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v'||_{L^2(\Omega)}$. 从而

$$a(v,v) = \int_0^1 (v'')^2 dx \geq \frac{1}{3}\int_0^1 (v^2 + (v')^2 + (v'')^2)dx = \frac{1}{3}||v||_{H^2(\Omega)}^2$$

(iii) L 线性是显然的, 只用证明有界:

$$|L(v)| \leq \int_0^1 |fv|dx \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{H^2(\Omega)}.$$

即 $||L||_{V'} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}$.

综上, 由 Lax-Milgram 定理就得到变分问题解的存在唯一性.