第四章: 有限元空间的构造

PB19061245 王翔远

February 2024

本章的目的, 是要构造 (有限维的) 有限元空间 $V_h \subset V$ 去逼近解空间. 在第一章中, 我们已经看到对一维模型问题, V_h 一种取法为分片线性函数空间. 而在这一章中, 我们考虑对不同类型的单元, 用更多样化的方式进行有限元空间的选取.

1 Ciarlet 关于有限元的定义

Definition 1. 称 $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是一个有限元 (finite element), 如果
(i) 单元区域 $\mathcal{K} \subseteq R^n$ 是一个有界闭集, 具有非空的内部, 以及分片光滑的边界
(ii) 形函数空间 $\mathcal{P}$ 是一个 $\mathcal{K}$ 上的有限维函数空间
(iii) 结点变量 (结点基) $\mathcal{N} = \{N_1, ..., N_k\}$ 是 $\mathcal{P}'$ 的一组基

Definition 2. 设 $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是一个有限元, 与 $\mathcal{N}$ 相对偶的 $\mathcal{P}$ 中的基 $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_k\}$ $(i.e. N_i(\phi_j) = \delta_{ij})$ 称为单元基函数

Note. 显然, $\mathcal{P}'$ 一组结点 $\{N_i\}_{i=1}^n$ 为基当且仅当 $\mathcal{P}$ 中相对偶的这组函数

$\{\phi_i\}_{i=1}^n (i.e. N_i(\phi_j) = \delta_{ij})$ 为基 $\square$

Example 1. (1 维 Lagrange 线性元) 令 $\mathcal{K}$ =[0, 1], $\mathcal{P}$: 分片线性多项式空间, $\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$满足$N_1(v) = v(0), N_2(v) = v(1), \forall v \in \mathcal{P}$. 可知 $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是一个有限元. 并且单元基函数为 $\phi_1(x) = 1 - x, \phi_2(x) = x$.

下面这个定理是一个验证结点基或者单元基函数的很有用的定理

Theorem 1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个 d 维线性空间, $\{N_1, ..., N_d\}$ 是对偶空间 $\mathcal{P}'$ 的一个子集. 那么 $\{N_1, ..., N_d\}$ 是 $\mathcal{P}'$ 的基 $\Longleftrightarrow$ 如果 $N_i(v) = 0 \ for \ i = 1, ..., d$ 则 $v \equiv 0$

Proof.

($\Longrightarrow$) 设 $\{N_1, ..., N_d\}$ 为结点基, 那么 $\{\phi_1, ..., \phi_d\}$ 是形函数空间的基. 将 v 在基函数下展开:

$$v = \sum_j v_j \phi_j$$

则

$$N_i(\sum_j v_j \phi_j) = \sum_j v_j N_i(\phi_j) = v_i = 0 \Rightarrow v \equiv 0$$

($\Longleftarrow$) 设 $\{\phi_1, ..., \phi_d\}$ 是 d 维形函数空间的一组基. 将 v 在基函数下展开:

$$v = \sum_j v_j \phi_j$$

$$N_i(v) = \sum_j N_i(\phi_j) v_j = 0, \forall i = 1, ..., d$$

写成矩阵形式:

$$B\hat{v} = 0, \text{ 其中} B_{ij} = N_i(\phi_j), \hat{v} = (v_j)$$

该矩阵方程仅有零解, 因此矩阵 B 可逆.

设

$$\sum_j N_j \alpha_j = 0$$

代入 $v = \phi_i$,

$$\sum_j N_j(\phi_i)\alpha_j = 0, i = 1, ..., d$$

即

$$B^T \hat{\alpha} = 0, \hat{\alpha} = (\alpha_j)$$

由于 B 可逆可知 $\hat{\alpha}$ 只能为 0, 因此 $\{N_1, ..., N_d\}$ 为结点基 □

2 一维问题有限元

一维情形的单元性状就是一个区间, 我们考虑 Lagrange 线性元和二次元, 以及 Hermite 元几种情形下的单元基函数

Example 2. (Lagrange 线性元) 这种情况我们已经十分熟悉, 标准单元 ($[0,1]$) 基函数 (也称形函数) 如下:

$$\psi^0(\xi)=\begin{cases}1-\xi, & \xi\in[0,1]\\ 0, & \text{else}\end{cases}\qquad \psi^1(\xi)=\begin{cases}\xi, & \xi\in[0,1]\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

插值解: $u_h(\xi)=u_0N^0(\xi)+u_1N^1(\xi)$, 其中 $u_0=u_h(0), u_1=u_h(1)$
在实际单元 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 上, 利用 $\xi=\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$

$$\psi_j^0(x)=\psi^0(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})\quad \psi_j^1(x)=\psi^1(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})$$

插值解: $u_h(x)=u_{j-1}N^0(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})+u_jN^1(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})$ 这里是 $u_{j-1}=u_h(x_{j-1}),u_j=u_h(x_j)$

Example 3. (Lagrange 二次元) 在此, 二次多项式有三个系数, 需要三个结点函数值以确定. 在标准单元上取 0, $\frac{1}{2}$, 1 作为三个结点. 我们通常选取的 Lagrange 基函数要求在一个结点为 1 而其余结点为 0. 首先考虑结点 0 相对应的基函数 N_0: 它在 1/2, 1 处为 0, 因此设

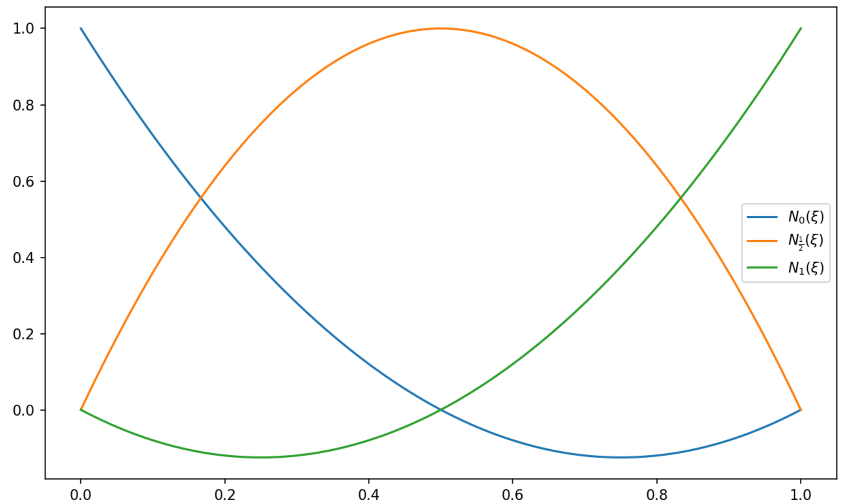
$$N_0(\xi)=C(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1)$$

结合 $N_0(0)=1$ 知 $C=2, N_0(\xi)=(2\xi-1)(\xi-1)$. 同理

$$N_{\frac{1}{2}}(\xi)=4\xi(1-\xi)\quad N_1(\xi)=\xi(2\xi-1)$$

插值解 $u_h(\xi)=u_0N_0(\xi)+u_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}(\xi)+u_1N_1(\xi)$
在实际单元 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 上, 利用 $\xi=\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$ 即可得实际单元基函数和插值解

Note. 一维情形下标准单元上二次形函数画在一张图上如下.



假定 $I = [0,1]$ 细分为 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = 1$, 不难想象 Lagrange 二次元下的全局基函数为: $\{\phi_j\}_{j=1}^{2N+1}$.

$$\phi_j(x) = \begin{cases} N_1(\dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}), & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ N_0(\dfrac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}), & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\phi_{j-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} N_{\frac{1}{2}}(\dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}), & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & else \end{cases}$$

类似的, 一维情形更高次元的全局基函数也大致会是这么个意思 □

Example 4. (Hermite 元) Hermite 插值是要求多项式在结点上取给定函数和导数值 (*i.e.* 每个结点自由度为 2). 每个单元共有 4 个自由度, 可以确定一个三次多项式.

在标准单元上, 我们要求四个基函数 $N_i^{(j)}$ 满足: $N_i^{(0)}$ 在一个结点函数值为 1, 另一个为 0, 且导数值在两结点均为 0. $N_i^{(1)}$ 则要求一个结点导数值为 1, 另一个为 0, 且函数值在两结点均为 0.

首先求 $N_0^{(0)}$: 它在 1 处函数和导数均为 0, 因此 1 是一个二重零点, 设

$$N_0^{(0)}(\xi) = (1-\xi)^2(a\xi + b).$$

之后利用 0 处函数值为 1, 1 处导数值为 0 就可得 $N_0^{(0)} = (1-\xi)^2(2\xi+1)$, 同理可求出

$$\begin{aligned} N_0^{(1)}(\xi) &= (1-\xi)^2\xi \\ N_1^{(0)}(\xi) &= \xi^2(3-2\xi) \\ N_1^{(1)}(\xi) &= -(1-\xi)\xi^2 \end{aligned}$$

其上插值解 $u_h(\xi) = u_0N_0(\xi) + u_1N_1(\xi) + u_0^{(1)}N_0^{(1)}(\xi) + u_1^{(1)}N_1^{(1)}(\xi)$

实际单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 上的插值解:

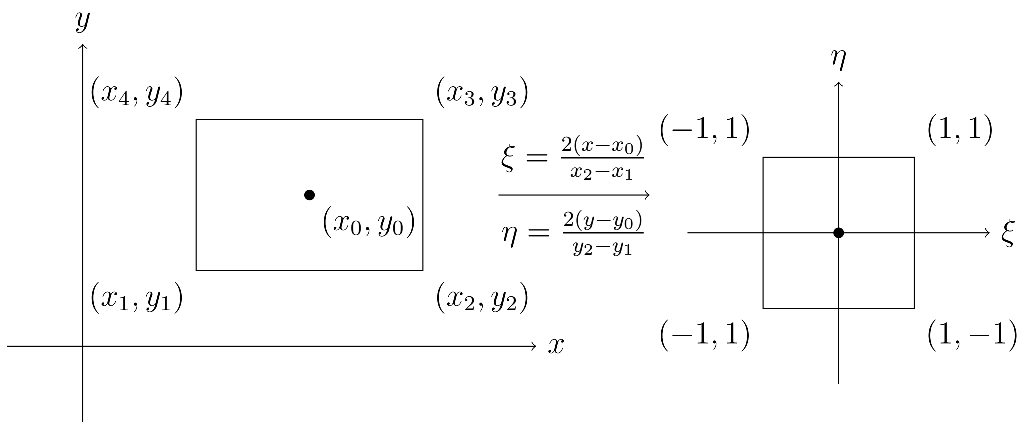
$$\begin{aligned} u_h(x) &= u_{j-1}N_0(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}) + u_1N_1(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}) \\ &+ u_0^{(1)}(x_j-x_{j-1})N_0^{(1)}(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}) + u_1^{(1)}(x_j-x_{j-1})N_1^{(1)}(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}) \end{aligned}$$

Note. Hermite 元常用于一些要求有限元解光滑性较高的情况. 比如广义解空间 $V = H^2(\Omega)$ 下, 因为 $H^2 \subset C^1$, 我们就选用 Hermite 元 (确保有限元解 $u_h \in V_h \subset V$ 的连续可微性). □

3 二维矩形单元有限元

二维的矩形单元可以说是一维区间的直接推广, 其形函数一般可用一维形函数通过张量积形式导出.

首先, 任一矩形单元通过变换可以转化为标准的方形单元 $[-1,1]^2$



另外, 引入两个常用记号

Definition 3.

$$P^k: \text{多项式的次数不超过 k}$$

$$Q^k: \text{多项式每个方向次数不超过 k}$$

Note. 后面我们如果说用线性 (二次, 三次) 指的就是 P^k 元, 如果说用双线性 (双二次, 双三次) 指的就是用 Q^k 元. □

Example 5. (Lagrange 矩形双线性单元形函数) 双线性多项式有四个待定系数 ($u_h(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$), 因此考虑用四个结点函数值进行插值. 显然就取四个顶点就行. 在一维情形单元 $[-1,1]$ 上的形函数为:

$$L_{-1}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad L_1(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

在二维标准单元 $[-1,1]^2$ 上的形函数用张量积形式导出:

$$\begin{aligned}
N_{-1,-1}(\xi,\eta) &= L_{-1}(\xi)L_{-1}(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_{1,-1}(\xi,\eta) &= L_1(\xi)L_{-1}(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
N_{1,1}(\xi,\eta) &= L_1(\xi)L_1(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_{-1,1}(\xi,\eta) &= L_{-1}(\xi)L_1(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}$$

插值解: $u_h(\xi,\eta) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4$, 其中 $u_i, i = 1,2,3,4$ 是各结点处函数值

Example 6. (Lagrange 矩形双二次单元形函数) 双二次多项式有 $9(3\times 3)$ 个待定系数, 用 9 个结点: 四个顶点 + 各边中点 + 形心. 在一维单元 $[-1,1]$ 上二次形函数为:

$$L_{-1}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), L_0(\xi) = (1+\xi)(1-\xi), L_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

在二维单元 $[-1,1]^2$ 上的形函数可以类似上例用张量积形式得出

Example 7. (Lagrange 矩形双二次元插值的唯一可解性和连续性)

(1) 验证插值唯一可解性: 即是说由 9 个插值结点函数值唯一确定了插值解函数 $u_h \in Q^2$), 也就是验证 9 个形函数构成单元上双二次多项式空间的一组基, 由定理 1 也相当于验证当单元的各结点处函数值都为 0 时, 插值解 u_h 在单元上恒为 0. 我们在标准单元上进行验证就可以了.

首先, 在 $\xi = 1$ 这条边上, 函数 u_h 是关于 η 的二次函数, 由于在边上三个不同结点均为 0 可知 u_h 含有因子 $(1-\xi)$. 同理, u_h 还含有 $(1+\xi), (1-\eta), (1+\eta)$. 设

$$u_h = C(1+\xi)(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \in Q^2$$

由 $u_h(0,0) = 0$ 可知 $C = 0$, 故 $u_h \equiv 0$.

(2) 验证连续性, 这里只需要验证在公共边界上的解连续性即可. 通常来说, 我们可以验证: 给定$(x_0, y_0) \in \partial\Omega$, 当点列 $\{(x_n, y_n)\} \to (x_0, y_0)$ 时, 解 $u(x_n, y_n) \to u(x_0, y_0)$.

由于这里在左右单元上分别具有连续性, 不难发现我们其实只需要验证左右单元上的插值解 u_1, u_2 在公共边界上取相同值就可以了. (此时, $\{u(x_n, y_n)\}$ 根据每一点总处在两个区域其中一个所划分的两个子列都收敛到同一个值, 自然 $\{u(x_n, y_n)\}$ 收敛). 其实这样就把问题化归到一维情形二次多项式 3 结点插值唯一可解性上了, 连续性自然得证.

Note. 我们还可以对上述矩形单元双二次元插值稍作改变, 令插值解为 $u_h(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a^5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$, 相应的结点扣去形心那一个. 我们也可以用因子分解手法导出形函数, 另外这样插值出的解也是唯一确定并且连续的 □

Example 8. (Hermite 矩形双三次单元形函数) 标准单元 $\hat{K}=[-1,1]^2$. 采用四个顶点, 每个顶点有四个自由度: 函数值, 两个偏导数, 混合偏导数. 因此单元共有 16 个自由度, 故用双三次多项式进行插值. 之前我们已经讨论一维 Hermite 三次插值基函数因子分解的求法, 直接给出区间 $[-1,1]$ 上的 Hermite 基:

$$L_{-1}^{(0)}(\xi)=\frac{1}{4}(\xi-1)^2(\xi+2)\quad L_{-1}^{(1)}(\xi)=\frac{1}{4}(\xi-1)^2(\xi+1)$$

$$L_{1}^{(0)}(\xi)=\frac{1}{4}(\xi+1)^2(-\xi+2)\quad L_{1}^{(1)}=\frac{1}{4}(\xi+1)^2(\xi-1)$$

矩形单元 Hermite 基 $\{N_{i,j}^{(k,l)}\}$ 可以用张量积得到, 例如:

$$N_{-1,-1}^{(0,0)}(\xi,\eta)=L_{-1}^{(0)}(\xi)L_{-1}^{(0)}(\eta)\quad N_{-1,-1}^{(0,1)}(\xi,\eta)=L_{-1}^{(0)}(\xi)L_{-1}^{(1)}(\eta)$$

$$N_{-1,-1}^{(1,0)}(\xi,\eta)=L_{-1}^{(1)}(\xi)L_{-1}^{(0)}(\eta)\quad N_{-1,-1}^{(1,1)}(\xi,\eta)=L_{-1}^{(1)}(\xi)L_{-1}^{(1)}(\eta)$$

Note. **插值解的存在唯一性** (标准单元 $[-1,1]^2$ 上看): 设结点处函数值, 偏导和混合偏导均为 0. 首先, 在右边界 $\xi=1$ 上时关于 η 的三次多项式, 且在两个结点处关于 η 的函数和偏导数均为 0, 从而 $u_h|_{\xi=1}\equiv 0$, 则含有因子 $(1-\xi)$, 同理含有 $(1+\xi),(1-\eta),(1+\eta)$. 设

$$u_h(\xi,\eta)=C(\xi,\eta)(1-\xi^2)(1-\eta^2),\text{其中}C(\xi,\eta)=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta$$

$$u_h^{(1,1)}(\xi,\eta)=a_4(1-\xi^2)(1-\eta^2)+(a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta)4\xi\eta$$

由于 $u_h^{(1,1)}(\pm 1, \pm 1) = 0$, 可得如下方程组:

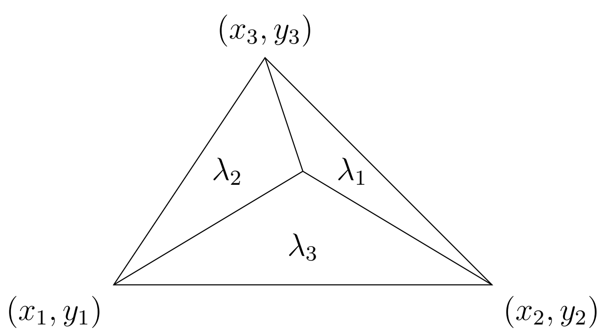
$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\
a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0 \\
a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0 \\
a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0
\end{cases}
$$

易得 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, 从而 $u_h \equiv 0$

连续可导性只需注意到在公共边界上函数及偏导数取值的唯一确定性即可 □

4 二维三角单元有限元

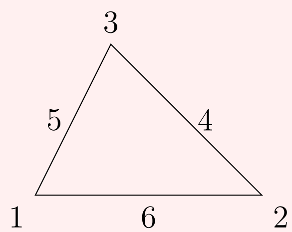
三角形单元这里我们为表示方便引入面积坐标:



$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
&x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = x \\
&y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 = y
\end{aligned}
$$

右侧的等式给出了面积坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 和实际坐标 (x, y) 的对应关系.

Example 9. (Lagrange 三角形二次形函数) P^2 元有 6(1+2+3) 个待定系数, 因此用 6 个结点的函数值, 自然就用 3 个顶点以及各边中点.



$$N_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=2\lambda_1(\lambda_1-\frac{1}{2})$$
$$N_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=2\lambda_2(\lambda_2-\frac{1}{2})$$
$$N_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=2\lambda_3(\lambda_3-\frac{1}{2})$$
$$N_4(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=4\lambda_2\lambda_3$$
$$N_5(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=4\lambda_3\lambda_1$$
$$N_6(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=4\lambda_1\lambda_2$$

说一下上述基函数的求法:

首先对 $N_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 由于它在结点 3, 4, 2 处均为 0, 因此含有因子 λ_1. 结合在 5, 6 结点为 0, 以及在 1 结点为 1 利用下待定系数法求出 N_1 表达式.

另外对 $N_4(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 它在 1, 5, 3 结点为 0, 则含有因子 λ_2 , 在 1, 6, 2 结点为 0, 则含有因子 λ_3, 结合在 4 结点函数值为 1, 可得 N_4 表达式

最后, 插值解的存在唯一性和连续性均很好验证

Note. 补充一个: Lagrange 三角单元三次元方法, P^3 可知需要 10 个结点函数值. 结点选取为: 三个顶点 + 每条边上三等分点 + 形心. 单元基函数的确定以及插值的唯一可解性和连续性都不难分析得出.

三角形单元 Hermite 元的计算较为麻烦, 在此略去. □

最后, 顺便提一下三维有限元构造. 对六面体, 标准单元为 $[-1,1]^3$. 类比矩形单元, 仍用张量积可以构造 Q^1, Q^2 等空间上的基函数. 而对四面体, 它可以类比三角形单元, 引入体积坐标 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$. 不多赘述.

A 等参元简介

注: 该部分内容仅为一点补充介绍内容, 不看也行.

等参数单元（简称等参元）是通过对单元几何形状和单元内的参变量函数采用相同数目的节点参数和相同的形函数进行变换而设计出来的。

等参元的基本思想是首先在局部坐标系中定义一个规整形状的单元 (母单元)，然后通过坐标变换，将母单元在总体坐标系中映射成实际网格划分的曲边或曲面单元。如果子单元的位移函数插值结点数与其位置坐标变换结点数相等，且其位移函数插值公式与位置坐标变换式都用相同的形函数与结点参数进行插值，则称其为等参元。

等参元能很好地适应曲线边界和曲面边界，准确地模拟结构形状, 是有限元程序中主要采用的单元形式 (我们之前用的如矩形通过 $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ 变换到标准单元 $(\xi, \eta) \in [-1, 1]^2$ 当然也属于是, 不过实际中四边形单元性状未必能像矩形这样方方正正)

上面说的比较抽象, 更详细具体的内容见知乎: 有限元中的等参单元

另外, 老师做的"chap5-ppt" 展示图示了各种有限元, 也可以参考