第五章: 协调有限元空间的误差估计

PB19061245 王翔远

February 2024

本章我们考虑用有限元空间 V_h 代替广义解空间 V 所产生的误差. 之前我们在第三章中已经证明如下定理:

Theorem 1. (Cea 引理) 抽象变分问题 (W) 的解 u 与离散抽象变分问题 (W_h) 解 u_h, 满足

$$||u-u_h||_V \leq C\inf_{v\in V_h}||u-v||_V$$

这个定理说明, 我们后面可以通过研究插值误差估计, 直接得到有限元解的误差

1 一维分片线性插值误差估计

假定区域 $I=[a,b]$ 划分为: $a=x_0<x_1...<x_N=b$.

设 $u\in H^2(I)\hookrightarrow C^1(\Omega)$. 目标是估计 $||u-\prod u||$ (包括 L^2, H^1 范数), 其中 $\prod$ 是插值算子.

记 $e(x)=u(x)-\prod u(x)$, 想估计 $\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}e^2dx, \sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}(e')^2dx$.

思路是:

1. 将区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 变换到 $[0,1]$, 在 $[0,1]$ 上用高阶半范数估计低阶半范数.

2. 变换回原区间, 算出变换前后的半范数关系, 进而求出插值误差和尺度的关系.

(1) 首先, 引入长度坐标 (λ_1, λ_2) :

$$\lambda_1 = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \triangleq \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$$

则 $e(x) \to \hat{e}(\lambda), \lambda \in [0,1]$.

由 $e(x_{i-1}) = e(x_i) = 0$ 知 $\hat{e}(0) = \hat{e}(1) = 0$, 且 $e(x) \in C^1[x_{i-1}, x_i]$ 说明 $\hat{e}(\lambda) \in C^1[0,1]$. 从而, 根据 Rolle 中值定理: $\hat{e}'(\lambda_0) = 0(\lambda_0 \in (0,1))$. 于是

$$\begin{aligned}
|\hat{e}'(\lambda)| &= |\int_{\lambda_0}^{\lambda} e''(\tau) d\tau| \\
&\leq \int_0^1 |\hat{e}''(\tau)| d\tau \\
&\leq (\int_0^1 1^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 |\hat{e}''(\tau)|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\int_0^1 |\hat{e}''(\tau)|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

进而可知半范数关系

$$|\hat{e}|_{H^1[0,1]} \leq |\hat{e}|_{H^2[0,1]}$$

同理可知 $||\hat{e}||_{L^2[0,1]} \leq |\hat{e}|_{H^1[0,1]}$.

(2) 从标准区间回到原区间. (记 $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\hat{I} = [0,1]$)

$$\hat{e}'(\lambda) = e'(x) \frac{dx}{d\lambda} = h_i e'(x)$$

$$\hat{e}''(\lambda) = h_i^2 e''(x)$$

而

$$||\hat{e}||^2_{L^2(\hat{I})} = \int_0^1 (\hat{e}(\lambda))^2 d\lambda = (h_i)^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (e(x))^2 dx$$

因此有

$$|\hat{e}|^2_{H^1(\hat{I})} = h_i |e|^2_{H^1(I_i)}$$

$$|\hat{e}|^2_{H^2(\hat{I})} = h_i^3 |e|^2_{H^2(I_i)} = h_i^3 |u|^2_{H^2(I_i)}$$

故

$$\begin{aligned}
||e||^2_{L^2[a,b]} &= \sum_{i=1}^N ||e||^2_{L^2(I_i)} \\
&= \sum_{i=1}^N h_i ||\hat{e}||^2_{L^2(\hat{I})} \\
&\leq \sum_{i=1}^N h_i |\hat{e}|^2_{H^2(\hat{I})} \\
&= \sum_{i=1}^N h_i^4 |u|^2_{H^2(I_i)} \leq h^4 |u|^2_{H^2[a,b]}
\end{aligned}$$

其中 $h = \max_i \{h_i\}$. 从而得到 $(I = [a,b])$

$$||e||^2_{L^2(I)} \leq h^2 |u|_{H^2(I)}$$

同理

$$|e|^2_{H^1(I)} \leq h |u|_{H^2(I)}$$

$$||e||^2_{H^1(I)} \leq \sqrt{2} h |u|_{H^2(I)}$$

综上有如下定理:

Theorem 2. 对于一维分段线性插值, 如果 $u \in H^2(I)$, 则

$$||u - \prod u||_{L^2(i)} \leq h^2 |u|_{H^2(I)}$$

$$||u - \prod u||_{H^1(I)} \leq \sqrt{2} h |u|_{H^2(I)}$$

更一般的

Theorem 3. 对于一维分段 k 次多项式插值, 如果被插函数 $u \in H^{k+1}(I)$, 记 $\prod u$ 是 u 的分片 k 次插值多项式, 在 I 上有连续 $l-1$ 阶导数, $\bar{I}$ 上有 l 阶分片连续导数, 则

$$||u - \prod u||_{H^s(I)} \leq C h^{k+1-s} |u|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad 0 \leq s \leq \min(k+1, l)$$

Note. $l = 1$: Lagrange 插值 $(s \leq 1)$; $l = 2$: Hermite 插值 $(s \leq 2)$ □

2 二维三角形单元分片线性插值误差估计

设 $u \in H^2(\Omega)$, 剖分 $\Omega = \bigcup\limits_I K_i$. 我们的目标主要是估计 $||u - \prod u||_{H^1(\Omega)}$

在一维情形, 根据 Sobolev 嵌入定理有 $H^2(I) \hookrightarrow C^1(I)$, 从而成立 Rolle 中值定理. 但二维情形 $(n = 2)$ 下, $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{m-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$, 不再能用 Rolle 中值定理对偏导数进行估计. 这里, 我们引入 Sobolev 空间中的等价范数定理.

Theorem 4. (等价范数定理) 设 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 是一列 $H^k(\Omega)$ 有界线性泛函, 它们作用于任一次数 $\leq k-1$ 的非零多项式时值不全为 0. 那么 $||u||_{H^k(\Omega)}$ 范数等价于范数 $|u|_{H^k(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} |l_i(u)|$

下面开始进行误差估计, 思路也和一维情形比较类似:

1. $\hat{K}$ 上用 $|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})}$ 控制 $|\hat{e}|_{H^1(\hat{K})}$

2. 回到 K 上, 找到 $||e||_{H^1(K)}$, $|e|_{H^2(K)}$

(1) 首先, 引入记号:

$$\hat{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) := u(x, y), \text{其中} x = \sum_{i=1}^{3} x_i \lambda_i, y = \sum_{i=1}^{3} y_i \lambda_i$$

$$\widehat{\prod} \hat{u} := \sum_{i=1}^{3} \hat{u}(\hat{P}_i) \lambda_i$$

注意到它和 K 上的 $\prod u = \sum_{i=1}^{3} u(P_i) \lambda_i(x, y)$ 一一对应. (标准三角形单元 $\hat{K}$ 就是三顶点为 $\hat{P}_1$(0,0), $\hat{P}_2$(1,0), $\hat{P}_3$(1,1) 的三角形)

Lemma 1. $\widehat{\prod u} = \widehat{\prod} \hat{u}$

Proof.

$$\widehat{\prod} \hat{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{3} \hat{u}(\hat{P}_i) \lambda_i.$$

而

$$\prod u\,(x, y) = \sum_{i=1}^{3} u(P_i) \lambda_i(x, y)$$

$$\widehat{\prod u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{3} u(P_i) \lambda_i$$

显然, $\hat{u}(\hat{P}_i) = u(P_i)$(因为 $(x_P, y_P) = (\sum_{i=1}^3 x_i\lambda_i^P, \sum_{i=1}^3 y_i\lambda_i^P)$), 因此结论成立. □

Theorem 5. 设 $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$, 则 $||\hat{e}||_{H^2(\hat{K})} \leq C|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})}$

Proof. 定义 $H^2(\hat{K})$ 上的泛函 $l_i, i = 1, 2, 3,$

$$l_i(\hat{u}) = \hat{u}(\hat{P}_i)$$

由嵌入定理 $H^2(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, 从而 $|l_i(\hat{u})| = |\hat{u}(\hat{P}_i)| \leq \max_{\hat{K}}|\hat{u}| \leq C||\hat{u}||_{H^2(\hat{K})}$. 这样说明了 l_i 是有界线性泛函.

可知 l_i 作用于非零线性多项式 $\hat{v}$ 上不全为 0, 因为如果:

$$l_1(\hat{v}) = l_2(\hat{v}) = l_3(\hat{v}) = 0$$

即

$$\hat{v}(\hat{P}_1) = \hat{v}(\hat{P}_2) = \hat{v}(\hat{P}_3) = 0$$

可参考之前第四章中因子分解方法 (比如证明有限元插值解唯一存在性), 不难说明 $\hat{v} \equiv 0$, 矛盾.

由此, $\forall w \in H^2(\hat{K})$, 由等价范数定理

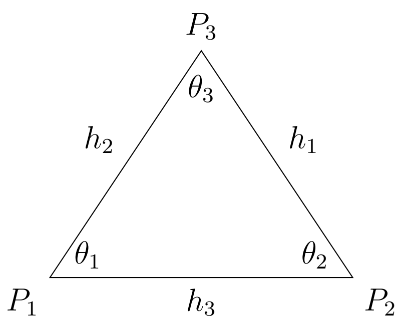
$$||w||_{H^2(\hat{K})} \leq C(|w|_{H^2(\hat{K})} + \sum_{i=1}^3 |l_i(w)|)$$

代入 $w = \hat{e}$. 注意 $e(x) = u(x) - \prod u(x)$, 由前述引理 $\hat{e} = \widehat{u - \prod u} = \hat{u} - \widehat{\prod}\hat{u}$, 自然 $\hat{e}(\hat{P}_i) = 0$. 因此

$$
\begin{aligned}
||\hat{e}||_{H^2(\hat{K})} &\le C(|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})} + \sum_{i=1}^{3} |l_i(\hat{e})|) \\
&= C(|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})} + \sum_{i=1}^{3} |\hat{e}(\hat{P}_i)|) \\
&= C|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})}
\end{aligned}
$$

证毕. □

(2) 分析 K 上范数和 $\hat{K}$ 上 (半) 范数的关系. 设 K 如下图所示



$\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$
$h_1 \le h_2 \le h_3 = h_K$

Lemma 2. 设 $u \in H^2(K), 0 \le s \le 2$

$$
|u|_{H^s(K)} \le C \frac{h_k^{1-s}}{\sin^s \theta_1} |\hat{u}|_{H^s(\hat{K})}
$$

$$
|\hat{u}|_{H^s(\hat{K})} \le C \frac{h_k^{s-1}}{\sin^{s-1} \theta_1} |u|_{H^s(K)}
$$

Proof. 其实就是一些初等的计算. 注意坐标变换关系 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1)$

$$
\begin{cases}
x = \sum_{i=1}^{3} x_i \lambda_i = (x_1 - x_3)\lambda_1 + (x_2 - x_3)\lambda_2 + x_3 \\
y = \sum_{i=1}^{3} y_i \lambda_i = (y_1 - y_3)\lambda_1 + (y_2 - y_3)\lambda_2 + y_3
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{(y_2-y_3)(x-x_3)-(x_2-x_3)(y-y_3)}{2\triangle_K} \\ \lambda_2 = \dfrac{(y_3-y_1)(x-x_3)-(x_3-x_1)(y-y_3)}{2\triangle_K} \end{cases}$$

其中 $\triangle_K$ 为三角形有向面积 (后续为方便, 假定定向为正, 即三顶点按照逆时针排列). 可知

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ y_1-y_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2\triangle_K$$

$$\int_K |u(x,y)|^2 dxdy = \int_{\hat{K}} |\hat{u}(\lambda_1,\lambda_2)|^2 2\triangle_K d\lambda_1 d\lambda_2 \le h_K^2 \int_{\hat{K}} |\hat{u}(\lambda_1,\lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2$$

即 $|u|_{H^0(K)} \le Ch_K|\hat{u}|_{H^0(\hat{K})}$. 再看 $|u|_{H^1(K)}$:

$$\begin{aligned} \int_K |\nabla u|^2 dxdy &= \int_{\hat{K}} |(\frac{\partial u}{\partial\lambda_1}, (\frac{\partial u}{\partial\lambda_2}) \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} \end{pmatrix} |^2 2\triangle_K d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2\triangle_K} \int_{\hat{K}} |(\frac{\partial u}{\partial\lambda_1}, (\frac{\partial u}{\partial\lambda_2}) \begin{pmatrix} y_2-y_3 & x_3-x_2 \\ y_3-y_1 & x_1-x_3 \end{pmatrix} |^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2\triangle_K} \int_{\hat{K}} ((y_2-y_3)u_{\lambda_1} + (y_3-y_1)u_{\lambda_2})^2 + ((x_2-x_3)u_{\lambda_1} + (x_3-x_1)u_{\lambda_2})^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &\le \frac{1}{\triangle_K} \int_{\hat{K}} h_1^2 u_{\lambda_1}^2 + h_2^2 u_{\lambda_2}^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (\text{利用 } (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)) \\ &\le \frac{h_K^2}{\triangle_K} \int_{\hat{K}} u_{\lambda_1}^2 + u_{\lambda_2}^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

而 (根据正弦定理有 $\frac{h_1}{\sin\theta_1} = \frac{h_2}{\sin\theta_2}$)

$$\triangle_K = \frac{1}{2}\sin\theta_1 h_1 h_3 = \frac{\sin^2\theta_1}{2\sin\theta_3} h_3^2 = C\sin^2\theta_1 h_K^2$$

故代入后得到

$$|u|^2_{H^1(K)} \le \frac{1}{C\sin^2\theta_1}|u|^2_{H^1(\hat{K})}$$

即有

$$|u|_{H^1(K)} \le C\frac{1}{\sin\theta_1}|u|_{H^1(\hat{K})}$$

余下的证明感兴趣的可自行计算, 在此省略. □

由上述引理, 我们不难得到三角单元分片线性插值误差估计结果

Theorem 6. 设被插函数 $u \in H^2(\Omega)$, 三角形最小内角为 θ, $h = \max\limits_K\{h_K\}$, $0 \le s \le 1$ (Ω 有界). 则

$$||u - \prod u||_{H^s(\Omega)} \le \frac{C}{\sin^{s+1}\theta}h^{2-s}|u|_{H^2(\Omega)}$$

Proof. 实际上, 我们只需要在 Ω 剖分的每个小三角形 K 上证明有半范数的控制

$$|e|_{H^s(K)} \le \frac{C}{\sin^{s+1}\theta}h^{2-s}|e|_{H^2(K)}$$

其中 $e = u - \prod u$. 注意到由于是线性插值, 有 $|u|_{H^2(K)} = |e|_{H^2(K)}$

$$\begin{aligned}
|e|_{H^s(K)} &\le C\frac{h^{1-s}}{\sin^s\theta}||\hat{e}||_{H^s(\hat{K})} \\
&\le C\frac{h^{1-s}}{\sin^s\theta}||\hat{e}||_{H^2(\hat{K})} \\
&\overset{\text{定理 5}}{\le} C\frac{h^{1-s}}{\sin^s\theta}|\hat{e}|_{H^2(\hat{K})} \\
&\le \frac{C}{\sin^{s+1}\theta}h^{2-s}|e|_{H^2(K)}
\end{aligned}$$

证毕. □

最后, 给出具有一般性的二维插值逼近定理.

Theorem 7. 设 Ω 充分光滑, $u \in H^{k+1}(\Omega)$. 将 Ω 划分为有限个边界充分光滑的单元 $K_1, ..., K_n$, 记 h_i: 单元直径, ρ_i: 含于 K_i 内的最大圆直径. 假定剖分是正规的, 即 $\exists \sigma > 0$ 当剖分加密时总有 $\max\limits_{\sigma} \frac{h_i}{\rho_i} \leq \sigma$ (直观看, 就是不会有那种很扁的三角形).
如果 $\prod u$ 为 u 的分片插值不超过 k 次多项式, 在 $\bar{\Omega}$ 上有 $l-1$ 阶连续导数和 l 阶分片连续导数, 则:

$$|u - \prod u|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{k+1-s}|u|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad 0 \leq s \leq \min(k+1, l)$$

Note. 顺带一提 Nitsche 对偶方法 (之前在第一章中已经在一维情形用过), 在假定已经取得了 H^1 范数的估计 $||u - u_h||_{H^1(\Omega)} = Ch^k|u|_{H^{k+1}(\Omega)}$ 可以对 L^2 范数做出精确的估计:

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} = O(h^{k+1})$$

考虑辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta\phi = u - u_h \quad in\, \Omega \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&||u - u_h||^2_{L^2(\Omega)} = (u - u_h, -\Delta\phi) \xlongequal{\text{Green I 积分公式}} (\nabla(u - u_h), \nabla\phi) \\
&= a(u - u_h, \phi) \xlongequal{\text{误差方程}} a(u - u_h, \phi - \prod\phi) \\
&\leq ||u - u_h||_{H^1(\Omega)}||\phi - \prod\phi||_{H^1(\Omega)} \\
&\leq Ch^k|u|_{H^{k+1}(\Omega)}h|\phi|_{H^2(\Omega)} = Ch^{k+1}|u|_{H^{k+1}(\Omega)}|\phi|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

且 $|\phi|_{H^2(\Omega)} = |-\Delta\phi| \leq C||u - u_h||_{L^2(\Omega)}$. 便有 $||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|u|_{H^{k+1}(\Omega)}$ □

3　有限元空间的反估计式简介

通常而言, 区域有界时, 低阶模可以用高阶模进行控制, 而反之一般不成立.

不过, 有限元空间是有限维的, 因此能够考虑用高阶模估计低阶模, 称为反估计 (有限元空间的特有性质). 注意反估计式中的常数 C 通常依赖于网格的尺度.

Example 1. $I=[0,h]$, 有限元空间采用 P^2 . 对 $u\in P^2(I)$, 设 $u(x)=ax^2+bx+c$, 计算可得反估计:

$$|u|_{H^2(I)}\leq\frac{2\sqrt{3}}{h}|u|_{H^1(\Omega)}$$