第六章: 有限元方法在物理中的应用

PB19061245 王翔远

February 2024

1 n 维椭圆问题

Example 1.

$$(P_nD)\begin{cases} -\Delta u = f, \quad in\Omega \\ u|_{\Gamma_0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = g \quad (\partial\Omega = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_1) \end{cases}$$

求变分问题,

1. $\Gamma_0 \neq \emptyset$: 令 $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$, 记

$$a(u,v) := (\nabla u, \nabla v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

$$F(v) := \int_\Omega f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v ds$$

则 $(W) Find u \in V\ s.t.\ a(u,v) = F(v), \forall v \in V$

2. $\Gamma_0 = \emptyset$: 令 $V = \{v \in H^1(\Omega) : \bar{v} = \frac{1}{m(\Omega)}\int_\Omega v d\Omega = 0\}$. 变分形式与上面相同.

2　线性弹性问题

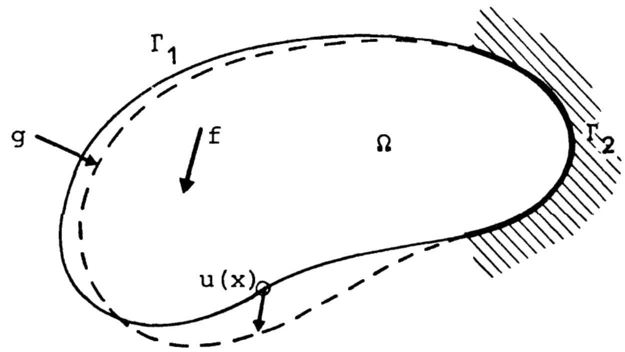

Fig 5.1

先简单介绍一下物理背景 (图来自于 Johnson 教材 5.1 节).

考虑一个空间中的各向同性的弹性体, 边界分为 Γ_1, Γ_2 两部分, 其中 Γ_2 是固定的. 弹性体的载荷力分为 volume load $f = (f_1, f_2, f_3)$, 以及 boundary load $g = (g_1, g_2, g_3)$.

我们想要求偏移量 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, 其中 u_i 为 x_i 方向的偏移量, 以及对称应力张量矩阵 $\sigma(u) = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$ (对角线为法向应力, 其余为剪切应力) .

定义形变矩阵 $\epsilon(u) = (\epsilon_{ij}(u))_{i,j=1,2,3}$,

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

Example 2. (线性弹性问题)

$$\begin{cases} \text{平衡方程} - \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad in\, \Omega \\ \text{胡克定律}: \sigma_{ij} = \lambda\, divu\, \delta_{ij} + \mu \epsilon_{ij}(u), \quad in\, \Omega \\ u = 0, \quad on\, \Gamma_2 \\ \sum_j \sigma_{ij}\nu_j = g_i, \quad on\, \Gamma_1 \end{cases}$$

注: 其中, $\nu = (\nu_j)$ 是单位外法向.

为方便起见, 引入记号: $v_{,j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}, j = 1, 2, 3$. 另外, 注意到利用应力张量矩阵的对称性有 $\sum_{i,j} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma_{ij}v_{i,j} + \sigma_{ji}v_{j,i}) = \sum_{i,j} \sigma_{ij}v_{i,j}$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_i f_i v_i d\Omega = -\int_\Omega \sum_{i,j} \sigma_{ij,j} v_i d\Omega \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j} \sigma_{ij} v_{ij} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} v_i \nu_j ds \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j} (\lambda\, divu\, \delta_{ij} + \mu\epsilon_{ij}(u))\epsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Gamma_1} \sum_i v_i g_i ds \\ &= \lambda \int_\Omega divu\, divv d\Omega + \mu \int_\Omega \sum_{i,j} \epsilon_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Gamma_1} \sum_i v_i g_i ds \end{aligned}$$

因此令 $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_2} = 0\}, a(u,v) = \lambda \int_\Omega divu\, divv d\Omega + \mu \int_\Omega \sum_{i,j} \epsilon_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v) d\Omega, L(v) = \int_\Omega \sum_i f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} \sum_i g_i v_i ds$, 得变分问题

$$(W) Find\, u \in V\, s.t.\, a(u,v) = F(v), \forall v \in V$$

有限元形式: $V_h = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : v \in (P^1(K))^3, \forall K; v|_{\Gamma_2} = 0\}$.

$$(W_h) Find\, u_h \in V_h\, s.t.\, a(u_h, v) = F(v), \forall v \in V_h$$

3 Stokes 流体问题

Example 3.

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, i = 1,2,3 \\ divu = 0 \quad in\Omega \quad (\text{不可压性}) \\ u = 0 \quad on\Gamma \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f_i v_i d\Omega = \mu\int_\Omega -\Delta u_i v_i d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i d\Omega \\ &= \mu\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i d\Omega - \mu\int_{\partial\Omega} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} ds + \int_{\partial\Omega} p v_i \nu_i ds - \int_\Omega p v_{i,i} d\Omega \end{aligned}$$

两边对 i 求和并利用边界条件以及散度为 0 条件,

$$\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega f_i v_i d\Omega = \mu\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \nabla u_i \cdot \nabla v_i d\Omega$$

因此, 令 $V = \{v : v \in (H_0^1(\Omega))^3, divv = 0\}, a(u,v) = \mu\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \nabla v_i d\Omega, F(v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 f_i v_i d\Omega$, 变分问题:

$$(W) Find\, u \in V\, s.t.\, a(u,v) = F(v), \forall v \in V$$

Note. 我们知道, 光滑向量场 v 是无源场, 当且仅当 v 在任何一点局部存在向量势, 即 $divv = 0 \iff \exists$向量场ϕ, $v = rot\phi$.

这样我们可将 V_h 写为 $\{v \in V : \exists\phi \in \text{有限维空间} W_h \subset H_0^2(\Omega)\, s.t.\, v = rot\phi\}$

不过, 这样子仍不好构造出空间中得一组基函数. 日后学习了一些非协调有限元方法等会再来看这个例子 (不可压性条件可以不显式体现于 V 的定义中) □